Лекция № 15. Периодические несинусоидальные токи

1. *Определение периодических несинусоидальных токов   
и напряжений*

На практике кривые ЭДС, напряжений и токов обычно в большей или меньшей степени отличны от постоянных или синусоидальных. Зависимость тока или напряжения от времени может быть периодической, почти периодической и непериодической.

***Периодические несинусоидальные токи и напряжения – это токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несину­соидальному закону.***

В машинных генераторах переменного тока, вследствие отличия распределения магнитной индукции вдоль зазора от синусоидального, наводимые в обмотках ЭДС отличаются от синусоидальных. В цепях, содержащих нелинейные сопротивления, индуктивности или емкости, даже при синусоидальных ЭДС возникают несинусоидальные токи и напряжения.

Таким образом, периодические несинусоидальные токи и напряжения возникают при четырех различных режимах работы электрических цепей (и при различных сочетаниях этих режимов):

1) источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а все элементы цепи - резистивные, индукти­вные и емкостные - линейны, то есть от тока не зависят;

2) источник ЭДС (источник тока) дает синусоидальную ЭДС (синусоидальный ток), но один или несколько элементов цепи нелинейны;

3) источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а в состав электрической цепи входят один или несколько нелинейных элементов;

4) источник ЭДС (источник тока) дает постоянную или синусоидальную ЭДС (ток), а один или несколько элементов цепи периодически изменяются во времени.

Генераторы периодических несинусоидальных импульсов применяются в различных устройствах радиотехники, автоматики, телемеханики, вычислительной техники и т.д. Форма импульсов может быть самой разли­чной: пилообразной (рис. 1, а), ступенчатой (рис. 1, б), прямоуголь­ной (рис. 1, в) и т.д.



а)



б)



в)

Рис. 1

Во всех задачах, где приходится иметь дело со сложными несину­соидальными токами и напряжениями, очень важно уметь свести сложную задачу к более простой и применить методы расчета линейных электрических цепей при несинусоидальных периодических токах и напряжениях, если их можно разложить на гармонические составляющие.

2. Изображение несинусоидальных токов и напряжений

с помощью рядов Фурье

Явления, происходящие в линейных электрических цепях при перио­дических, но несинусоидальных ЭДС, напряжениях и токах, проще всего поддаются исследованию, если функцию ЭДС, напряжения или тока представить в виде тригонометрического ряда Фурье.

Разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, то есть имеющих за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Этим условиям всегда удовлетворяют ЭДС, напряжения и токи в реаль­ных электрических цепях.

.

Спектральное представление периодических сигналов

|  |  |
| --- | --- |
| Электрические сигналы, математическими моделями которых являются периодические функции времени, могут быть представлены в виде графического описания (рис. 2) и соответствующего ему аналитического представления.  Любое периодическое несинусоидальное колебание можно разложить в бесконечный тригонометрический ряд, состоящий из постоянной составляющей и гармонических составляющих. |  |
| Рис. 2 |

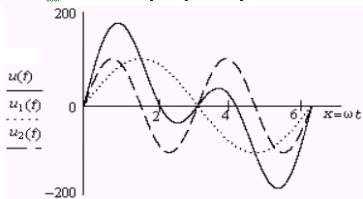
Тригонометрический ряд, называемый еще рядом Фурье, имеет две формы записи.

В первой форме, кроме постоянной составляющей, присутствуют лишь синусоидальные или косинусоидальные составляющие с начальными фазами, не равными нулю:

. (1)

Во второй форме наряду с постоянной составляющей присутствуют синусоидальные и косинусоидальные составляющие, но с начальными фазами, равными нулю:

. (2) В обеих формах записи использованы следующие обозначения:  – номер гармоники;  – круговая частота первой (основной) гармоники;  – период колебания;  – постоянная составляющая;  – амплитуда –й косинусоидальной составляющей;  – амплитуда –й синусоидальной составляющей.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рис. 2а – Пример сложения первой и второй гармоник негармонического сигнала  Графическое изображение ряда Фурье (рис. 3) представляет собой спектральную диаграмму, которая дает наглядное представление о зависимости амплитуд гармоник (спектр амплитуд) и фаз гармоник (спектр фаз) от их частот. | Спектр амплитуд | Спектр фаз |
| Рис. 3 | |

Ряд Фурье существенно упрощается, если имеет место какая–либо симметрия колебания относительно начала или осей координат. В табл. 1 приведены соответствующие упрощения.

|  |  |
| --- | --- |
| Табл. 1 | |
| Кривая симметрична относительно: | |
| 1) | оси ординат (четная функция): .   |  |  | | --- | --- | |  | В спектре отсутствуют синусоидальные () составляющие; | |
| 2) | начала координат (нечетная функция): .   |  |  | | --- | --- | |  | В спектре отсутствуют постоянная составляющая и косинусоидальные составляющие (); | |
| 3) | оси абсцисс при совмещении двух полупериодов: .   |  |  | | --- | --- | |  | В спектре отсутствуют постоянная составляющая () и четные синусоидальные и косинусоидальные составляющие (); | |
| 4) | оси ординат и оси абсцисс при совмещении полупериодов: .   |  |  | | --- | --- | |  | В спектре отсутствуют постоянная составляющая (), все синусоидальные составляющие () и четные косинусоидальные составляющие (); | |
| 5) | начала координат и оси абсцисс при совмещении двух полупериодов: .   |  |  | | --- | --- | |  | В спектре отсутствуют постоянная составляющая (), все косинусоидальные составляющие () и четные синусоидальные составляющие (). | |

Спектральная диаграмма (спектр) зависит от формы сигналов и их параметров. Пусть, например, необходимо построить спектральную диаграмму сигнала, графическое и аналитическое представление которого приведено на рис. 4. Параметры сигнала приведены рядом.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Рис. 4 |





Из сопоставления графического представления сигнала (рис. 4) с табл. 1 можно сделать вывод о том, что описывающая сигнал функция является четной, следовательно, в спектре сигнала отсутствуют синусоидальные () составляющие. Постоянная составляющая в соответствии с приведенным ранее выражением находится следующим образом:

.

Амплитуды гармоник:



Таким образом, разложение данной функции в ряд Фурье может быть представлено следующим образом:

.

Из этого выражения можно сделать вывод о том, что амплитуды четных гармоник в спектре данного сигнала равны нулю . Остальные расчеты сведены в табл. 2., используя которую можно построить спектральную диаграмму данного сигнала (рис. 5).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Таблица 3 | | | | | | | |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | , кГц | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | | an |  | 0 |  | 0 |  | 0 | | An= | 12,7 | 0 | 4,2 | 0 | 2,5 | 0 | |  |
|  |



Рис. 9

Эти же расчеты позволяют записать аналитическое представление разложения рассматриваемого сигнала в ряд Фурье с конкретными числовыми коэффициентами

,

где

.

Из приведенного примера можно сделать следующие выводы:

1. Спектр периодической последовательности является дискретным, линейчатым.

2. Количество спектральных линий в одном лепестке огибающей спектра определяется скважностью, так как интервал между спектральными линиями обратно пропорционален периоду, а точки пересечения огибающей спектра с осью частот определяются в данном случае длительностью импульса ().

Действующие значения несинусоидального тока

и напряжения

Действующее значение периодического тока определяется в общем виде как среднее квадратичное значение за период:



Раскладывая i(t) в ряд Фурье и производя интегрирование в итоге получим:



Аналогично, действующее значение несинусоидального напряжения равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений отдельных гармоник:



Пример. На входе двухполюсника напряжение



Найти действующие значения U и I.

Решение:



Активная, реактивная и полная мощности несинусоидального тока

Под активной мощностью Р периодического несинусоидального

тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники:



Активная, реактивная и полная мощность (по аналогии с синусоидальными токами и напряжениями) при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных, реактивных и полных мощностей постоянной и всех гармонических составляющих тока и напряжения.

Расчет цепей с несинусоидальными периодическими ЭДС и токами

Если в линейной цепи действует один или несколько источников несинусоидальных периодических ЭДС или токов, то расчет такой цепи распадается на три этапа:

*1. Разложение ЭДС или токов источников на постоянную и синусои­дальные составляющие (получение дискретного спектра).*

*2. Применение принципа наложения и расчет токов и напряжений в цепи для каждой из составляющих в отдельности.*

*3. Совместное рассмотрение решений, полученных для каждой из составляющих.*

Рассмотрим второй этап, представляющий собой основную часть расчета цепи с несинусоидальными периодическими ЭДС и токами.

Если, например, несинусоидальная ЭДС представлена в виде суммы постоянной и синусоидальных составляющих, то источник несинусоида­льной ЭДС можно рассматривать как последовательное соединение источ­ника постоянной ЭДС и источников синусоидальных ЭДС с различными частотами. Так, если ЭДС (рис. 2,а):



то действие источника такой ЭДС аналогично действию трех последова­тельно соединенных источников ЭДС (рис. 2,б):



.



а) б)

Рис. 2

Применяя принцип наложения и рассматривая действие каждой из состав­ляющих ЭДС в отдельности, можно найти составляющие токов во всех участках цепи.

Мгновенное значение тока в цепи равно сумме мгновенных значений составляющих токов. Если, например, в какой-либо ветви токи, создан­ные ЭДС Е0, e1 и e2, соответственно равны I0, i1 и i2, то общий ток:

i = I0 + i1 + i2.

Таким образом, расчет линейной цепи с несинусоидальными перио­дическими ЭДС сводится к решению n задач с синусоидальными ЭДС, где n - число синусоидальных составляющих ЭДС различных частот, и одной задачи с постоянными ЭДС.

*При расчете токов и напряжений, возникающих от действия постоян­ной составляющей ЭДС, необходимо иметь в виду, что падение напряже­ния на индуктивности при постоянном токе равно нулю, а также что постоянный ток через конденсатор С не проходит.*

*При расчете токов и напряжений от синусоидальных составляющих следует учитывать, что индуктивное сопротивление ХL растет прямо пропорционально частоте. Поэтому для k-гармоники XLk в k раз больше, чем для первой гармоники XL1:*



*Емкостное сопротивление уменьшается с ростом частоты, поэтому для k-гармоники ХCk в k раз меньше, чем для первой гармоники XC1:*



*При расчете каждой из гармоник можно пользоваться комплексным методом и строить векторные диаграммы для каждой из гармоник в отдельности. Однако недопустимы суммирование векторов и сложение комплек­сных напряжений и токов различных гармоник.*

Резонанс при несинусоидальных ЭДС и токах

Резонансным режимом работы электрической цепи, содержащей один или несколько индуктивных и один или несколько емкостных элементов, называют такой режим, при котором ток на входе цепи совпадает по фазе с действующей на входе ЭДС.

При несинусоидальных ЭДС и токах явление резонанса усложняется, так как возможны отдельные резонансы гармонических составляющих, то есть могут возникнуть резонансные режимы не только на первой гармонике, но и на высших гармониках.

Предположим, что источник несинусоидальной ЭДС, состоящий из трех гармоник, подключен к последовательно соединенным сопротивлению R, индуктивности L и емкости С (рис. 4,а). Тогда ток каждой гармоники равен:



****

****

**а) б)**

Рис. 4

*При возникновении резонансного или близкого к нему режима на какой-либо высшей гармонике токи и (или) напряжения на этой гармонике могут оказаться большими, чем токи и напряжения первой гармони­ки на этих участках цепи, несмотря на то, что амплитуда соответствующей высшей гармоники ЭДС на входе схемы может быть в несколько раз меньше амплитуды первой гармоники ЭДС.*

В цепях, содержащих несинусоидальные периодические ЭДС, резонансные явления могут применяться для выделения требуемых частот и, наоборот, подавления нежелательных частот.